TECHNIQUES MATHEMATIQUES POUR LA PHYSIQUE.
Tome 1, travaux dirigés, 1er cycle Relié – 9 février 1994
de Pierre Dubouix , Gabriel Soum , Raymond Jagut

------------- COMPOSITIONS DES INCERTITUDES / PIRE DES CAS --------------

L'erreur de mesure $\Delta_o X$ commise sur la mesure d'une grandeur X est la différence entre la valeur exacte X_e et la valeur mesurée X_m.

$$\Delta_o X = X_e - X_m \tag{1}$$

L'incertitude sur X est ΔX i.e. la relation suivante est toujours vérifiée :

$$\Delta X \geq |\Delta_o X| \tag{2}$$

Soit G = G(X,Y) , si l'on connaissait les erreurs $\Delta_o X$, $\Delta_o Y$ commises, on pourrait déterminer l'erreur $\Delta_o G$ définie par :

$$\Delta_o G = G_e - G_m = G(X_e, Y_e) - G(X_m, Y_m) = G(X_m + \Delta_o X, Y_m + \Delta_o Y) - G(X_m, Y_m) \tag{3}$$

Les quantités $\Delta_o X$, $\Delta_o Y$ sont toujours assez petites pour que l'on puisse se rammener à un calcul différentiel :

$$\Delta_o G \approx dG = G(X_m + dX, Y_m + dY) - G(X_m, Y_m) \tag{4}$$

or le calcul différentiel donne :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right) dX + \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right) dY \tag{5}$$

Dans le cas le plus défavorable, les erreur maximales étant ΔX et ΔY, on a

$$\boxed{\Delta G = \left|\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{X_m, Y_m}\right| \Delta X + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X_m, Y_m}\right| \Delta Y} \tag{6}$$

et finalement on obtient l'intervalle de confiance :

$$G_m - \Delta G \leq G_e \leq G_m + \Delta G \tag{7}$$

Remarque :
Dans le cas où G est un produit ou un quotient d'une puissance de X ou Y, le calcul est facilité par l'utilisation de la dérivée logarithmique (cf exemple ci-dessous)

La fonction G est défini par : $G = 25\dfrac{X^2}{Y}$, alors : $\dfrac{dG}{G} = 2\dfrac{dX}{X} - \dfrac{dY}{Y}$

soit en majorant :

$$\frac{\Delta G}{G} = 2\frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y}$$

Exemple : Calcul d'incertitude sur une mesure de puissance.

On veut mesurer la puissance consommée par un montage. On mesure la tension aux bornes de l'alimentation et le courant débité par l'alimentation.

Tension d'alimentation $V \approx 12$ VDC,

$$P = U \times I$$

On lit : U = 12.00 V, I = 100.0 mA soit P = 1.2 Watts

La documentation du multimètre CDA19 (2000 points de mesure) donne :

- pour la mesure de tension:
  calibre 20 Volts DC précision ± 0.5% lecture ± 2pt, soit donc une incertitude de :
  ± (0.5/100×12 + 2×0.01) = ± 0.08 volts
- pour la mesure de courant DC calibre 200 mA on lit : précision ±1.25% lecture ±3 pt, soit donc une incertitude de :
  ± (1.25/100×0.1 + 3×0.1/1000) = ± 1.55 mA

La dérivée logarithmique donne :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

soit :

$$\Delta P = \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}\right)P$$

soir ΔP = (0.08/12 + 1.55/100) × 1.2 = 0.0266 watts

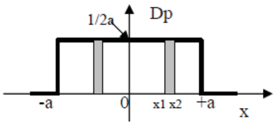
La mesure de puissance est faite avec une précision de 2.2%.

--------------------------**COMPOSITIONS DES INCERTITUDES** ---------------

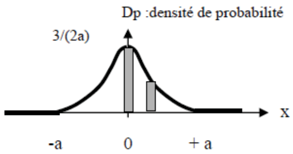
ftp://ftp.ac-grenoble.fr/telphy/ts/incertitude/incertitude/chapitres/CHAPITRE%20III.pdf

1. **Premier exemple : distribution rectangulaire (uniforme)**

La variable aléatoire x est définie par la fonction suivante :



2. **Deuxième exemple : distribution normale (gaussienne)**



Cette fonction est définie lorsque x varie de - ∞ à + ∞. Mais la probabilité pour que x appartienne à l'intervalle +/- a est de 99,73 %.

---//---

L'écart-type σ de la variable aléatoire x est alors défini par

$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(xi - \langle x \rangle)^2$ = **variance** de x (<x> est la valeur moyenne des n valeurs de x).

En toute rigueur, pour une fonction de distribution continue, n→ ∞ et le calcul est conduit pour -∞ < x< +∞ (intégrale).

Pour une fonction de distribution rectangulaire de demi-largeur « a », l'on démontre que σ = 0,58 a.
Pour une fonction de distribution normale de demi-largeur « a », l'on démontre que σ = 0,33 a.

---//------//---

Pour une fonction de distribution normale (**et seulement dans ce cas**) l'on démontre que la probabilité p pour que la variable aléatoire x appartienne à l'intervalle +/- σ est p = 68 ,27 %.
Sur l'intervalle +/- 2σ, p = 95,45 % et sur l'intervalle +/- 3 σ, p = 99,73%. **Nous avons donc borné la fonction de distribution normale avec a = 3 σ.**

---//---

- On mesure une tension U et le constructeur de l'instrument précise l'Erreur Maximale Tolérée ΔU. Cela signifie que l'erreur aléatoire ε_U appartient à l'intervalle +/- ΔU avec un niveau de confiance de 100 %.
Sans autre information l'on se place dans le cas le plus défavorable et l'on associe à l'erreur ε_U une variable aléatoire de demi largeur a = ΔU et dont la distribution est rectangulaire. Par commodité cette variable aléatoire sera aussi appelée ε_U. L'écart-type σ_U = 0,58a = 0,58ΔU.

---//---

Les erreurs aléatoires d'un processus de mesure étant repérées et évaluées, on leur affecte des variables aléatoires. Pour chaque variable aléatoire il faut définir la nature de la fonction de distribution et sa demi largeur. On peut alors évaluer l'écart-type de chaque variable aléatoire.

---//---

Si les variables aléatoires sont indépendantes, l'on montre que :

$$\sigma_M^2 = ((\partial M/\partial x) * \sigma_x)^2 + ((\partial M/\partial y) * \sigma_y)^2 + ((\partial M/\partial z) * \sigma_z)^2$$

Cette relation est connue sous le nom de « théorème des variances » (la variance est le carré de l'écart-type).
Avec cette relation l'on obtient σ_M, écart-type de la variable aléatoire ε_M.
Malheureusement, le théorème des variances n'apporte aucune information sur la nature de la fonction de distribution de la variable aléatoire ε_M : l'on ne peut donc pas définir de niveau de confiance pour l'intervalle +/- σ_M. Cette difficulté sera levée en utilisant les conséquences du « théorème central limite ».

---//---

D'après
A. BERNARD et J-L VIDAL Lycée des Catalins Montélimar Chapitre III

Le théorème central limite :

On démontre que si l'on compose plusieurs variables aléatoires ε_i en utilisant le théorème des variances, alors la distribution de la variable aléatoire ε_M tend rapidement vers une distribution normale. La loi de distribution normale est donc une loi limite vers laquelle tend toute composition de variables aléatoires. Si la variable aléatoire ε_M a une distribution normale, alors la valeur de ε_M appartient à l'intervalle $[-2\sigma_M , +2\sigma_M]$ avec une probabilité p = 95%.

D'autre part, l'on démontre que, **quelle que soit la fonction de distribution de ε_M**, l'intervalle +/- $2\sigma_M$ a un niveau de confiance supérieur ou égal à 95 %.

Dans le langage de la métrologie σ_M est appelé **l'incertitude-type** de la mesure et $2\ \sigma_M = \Delta M$ est appelé **l'incertitude élargie** (k = 2). Lorsque l'on utilise le théorème des variances, l'on dit que l'on compose des incertitudes.

Nous écrirons le résultat de la mesure sous la forme $M_{95\%} = M$ +/- ΔM, ce qui signifie que le niveau de confiance de cet intervalle est supérieur ou égal à 95%.

---//---

Conclusion :

Si les erreurs aléatoires ε_i sont indépendantes :

- On leur associe une variable aléatoire ε_i (fonction de distribution, demi largeur, écart-type σ_i)
- On évalue l'incertitude-type σ_M en utilisant le théorème des variances.
- On calcule l'incertitude élargie $\Delta M = 2\ \sigma_M$, l'intervalle +/- ΔM ayant un niveau de confiance supérieur ou égal à 95%
- On exprime le résultat sous la forme $M_{95\ \%} = M$ +/- ΔM

---//---

Nous avons choisi d'utiliser des variables aléatoires dont la distribution est soit normale soit rectangulaire.

Si les erreurs aléatoires sont **indépendantes** :

$\Delta M^2 = ((\partial M/\partial x) * k_x \Delta x)^2 + ((\partial M/\partial y) * k_y \Delta y)^2 + ((\partial M/\partial z) * k_z \Delta z)^2 + \ldots$

La valeur des coefficients k_i dépend de l'évaluation des termes Δi et du type de distribution retenu : dans tous les cas $k_i \Delta i = 2\sigma_i$ et $\Delta M = 2\ \sigma_M$.

Si Δi provient d'une autre composition, alors $\Delta i = 2\sigma_i$ et $k_i = 1$.

Si Δi est lié à une erreur dont la distribution est considérée comme normale alors $\Delta i = 2\sigma_i$ et $k_i = 1$.

Si Δi est lié à une erreur dont la distribution est considérée comme rectangulaire de demi largeur a, alors $\Delta i = a$ et $k_i = 1{,}16$.

L'on peut ainsi, dans tous les cas, évaluer directement l'incertitude élargie ΔM en utilisant les incertitudes Δi : le niveau de confiance p de l'intervalle +/-ΔM est >= 95%.

---//---