

Systèmes Linéaires Invariants 2

Correction - Sujet 2

Ceci est une correction du sujet 2 proposé. Il ne propose pas l'ensemble des explications et remarques possibles. Il représente le niveau attendu dans le cadre du M1ISTR-RODECO, mais avec une précision de rédaction un peu plus poussée que celle d'un examen de travaux pratiques de 2h. Les commentaires supplémentaires seront écrits en rouge. Les diverses critiques concernant la formulation du sujet seront écrits en bleu. On ne rappellera pas ici le sujet. Le script Matlab est proposé en Annexe.

Le sujet proposé est très intéressant. Par contre, il aurait fallu expliquer davantage le contexte et la modélisation proposée. Par exemple, étrange que le poids n'intervienne pas dans la modélisation, non ? De plus, les objectifs de régulation/poursuite n'apparaissent pas clairement. Dans la suite de l'examen, nous avons proposé d'étudier le problème de régulation, c'est à dire la convergence vers 0 des états du système.

1 Partie A

- Question 1 : D'après le modèle proposé et le schéma indicatif, l'entrée W modélise le profil de la route. Si le sol est plat, cette entrée est supposée nulle ou constante suivant l'origine du repère pour W . On supposera par la suite que W est une fonction nulle. Dans le sujet, W n'est pas parfaitement défini. Est-ce une force de réaction, la position de la route ? On aurait pu utiliser ce signal exogène pour étudier l'effet du profil de la route sur les variables d'état ... Une fois, le correcteur choisie, u est parfaitement connue et on obtient un système d'entrée W et de sortie les états dont on veut étudier les caractéristiques !
- Question 2 : Le modèle est donc un modèle SISO décrit par le modèle d'espace d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bU(t)$$

$$Y(t) = Cx(t) + DU(t)$$

avec b la première colonne de la matrice B donnée dans le sujet. Les états du système sont regroupés au sein d'un vecteur d'état

$$x(t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dot{X}_1 \\ Y_1 \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix}$$

Dans le sujet, Y_1 n'est pas défini. Nous avons supposé que $Y_1 = X_2$, la position de la masse M_2 . L'objectif de commande n'est pas clairement défini.

Si l'entrée de perturbation est mise à zéro, à quoi sert le dispositif mis en place ?

- Question 3 : La fonction de transfert entre l'entrée $U(p)$ et la sortie $Y(p)$ s'écrit :

$$G(p) = C(pI_4 - A)^{-1}b + D$$

Le calcul s'effectue facilement en utilisant Matlab et la fonction *tf*.

- Question 4 : Les propriétés du système, très vaste sujet. nous proposons de restreindre cette question à l'étude de :
 - La commandabilité,
 - L'observabilité,
 - La stabilité asymptotique,
 - La stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output).

La commandabilité :

Le modèle est commandable ssi la matrice de commandabilité est de rang égale au nombre d'état. La matrice de commandabilité s'écrit :

$$\mathcal{C}_0 = [b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b]$$

En utilisant Matlab, on détermine cette dernière matrice et on calcule son rang. Celui-ci vaut 4. Le système est donc commandable. Cela signifie que nous pouvons modifier par retour d'état les valeurs propres du système en boucle fermée.

L'observabilité :

Le modèle est observable ssi la matrice d'observabilité est de rang égale au nombre d'état. La matrice d'observabilité s'écrit :

$$\mathcal{C}_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

En utilisant Matlab, on détermine cette dernière matrice et on calcule son rang. Celui-ci vaut 4. Le système est donc observable. Cela signifie que nous pouvons choisir les valeurs propres de la matrice F et donc choisir la dynamique de l'erreur d'estimation.

La stabilité asymptotique et l'étude des modes :

On détermine les valeurs propres du modèle en utilisant Matlab ($\text{eig}(A)$). Celles-ci valent :

$$\{-23.97 + 35.19i; -23.97 - 35.19i; -0.11 + 3.77i; -0.11 - 3.77i\}$$

Comme les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives, le système est asymptotiquement stable.

Le système admet deux modes pseudo-périodiques (associés à une paire de valeurs propres complexes conjuguées). D'autre part, l'utilisation de la commande *damp* nous permet de caractériser ces modes en termes de rapidité et d'amortissement. Ainsi, le mode associé à la paire de valeur propre complexe $\{-0.1121 + 3.7677i; -0.1121 - 3.7677i\}$ admet une constante de temps égale à $8.92sec$ et un amortissement 0.029 . Le mode associé à la paire de valeur propre complexe $\{-23.9735 + 35.1887i; -23.9735 - 35.1887i\}$ admet une constante de temps égale à $0.0417sec$ et un amortissement 0.563 . Le premier mode est ainsi le mode dominant.

La stabilité BIBO :

Le système étant asymptotiquement stable, le système est également stable BIBO. Comme le système est commandable et observable, les pôles de la fonction de transfert sont également les valeurs propres de la matrice dynamique A .

Remarque : La fonction de transfert admet également deux zéros en $-2.66 \pm 12.52j$. Ces zéros peuvent poser des problèmes lors de la synthèse de lois de commandes et d'observateur. Ils risquent d'introduire des phénomènes de dépassement importants.

- Question 5 : On détermine les valeurs propres permettant de satisfaire les objectifs désirés :
 - Un temps de réponse $t_r \leq 5sec$.
 - Un overshoot de 5% et pas d'oscillations.

On choisit des valeurs propres de l'asservissement permettant d'obtenir des modes apériodiques ce qui permet d'éviter les overshoots et les oscillations. Une première valeur propre est choisie afin d'assurer une dynamique dominante du premier ordre. Les autres valeurs propres sont choisies afin d'obtenir des dynamiques plus rapides. Nous choisissons également de modifier le moins possibles les valeurs propres les plus rapides. Ainsi, un choix possible pour les valeurs propres désirées est

$$\{-23.9735; -23.9735; -3/5; -5\}$$

Le mode dominant est un mode apériodique de constante de temps $\tau = \frac{5}{3}$ qui converge en $5sec$. A l'aide de Matlab, on trouve le gain du retour d'état :

$$K = 10^5 \cdot [3.26 \quad 0.0463 \quad -3.911 \quad 0.01]$$

La loi de commande implantée est ainsi :

$$U(t) = -Kx(t) + v(t),$$

où $v(t)$ est un signal de référence. La réponse à des conditions initiales $x(0) = [0, 0, 0.1, 0]^T$ et $v(t) = 0$ est donnée par la Figure 1. Les états convergent vers 0 de manière apériodique sans oscillations. Le temps de réponse est autour de $5sec$.

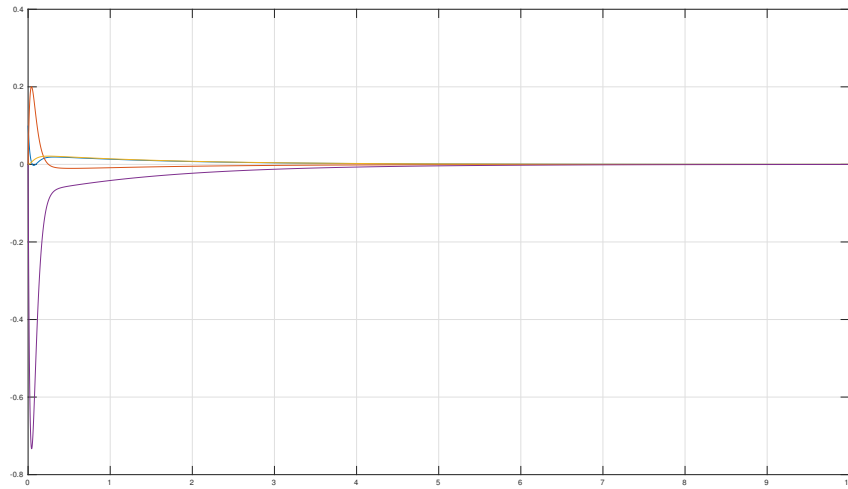


FIGURE 1 – Réponse à des conditions initiales du système asservi par un retour d'état

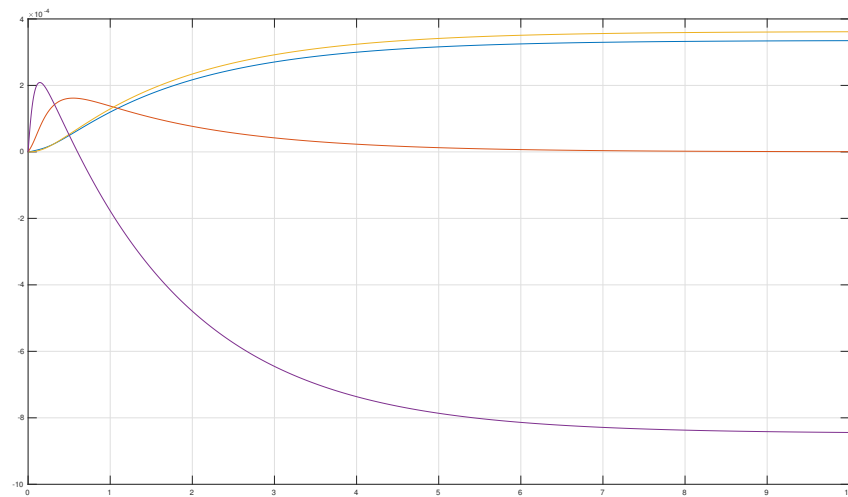


FIGURE 2 – Réponse du système asservi par un retour d'état à un échelon d'amplitude 1

La réponse temporelle du vecteur d'état à une entrée de référence de type échelon d'amplitude 1 est donnée par la Figure 2. La réponse est de type apériodique et converge avec un temps de réponse autour de 5 sec.

— Question 6 :

Dans un premier temps, on cherche une matrice de changement de base $\tilde{x}(t) = Px(t)$ permettant de définir la sortie $y(t) = x_3(t)$ comme la première composante de l'état $\tilde{x}(t)$. On choisit une matrice de permutation

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient une nouvelle représentation d'espace d'état du système :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \overbrace{PAP^{-1}}^{\tilde{A}} \tilde{x}(t) + \overbrace{Pb}^{\tilde{b}} U(t) \\ Y(t) &= \underbrace{CP^{-1}}_{\tilde{C}} \tilde{x}(t) + DU(t)\end{aligned}$$

où $CP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On partitionne ensuite les matrices PAP^{-1} et Pb de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} U(t) \\ Y(t) &= \tilde{x}_1(t)\end{aligned}$$

On cherche ensuite un observateur minimal identité de dimension 3 de la forme :

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t)$$

dont la sortie

$$\hat{x}(t) = Mz(t) + Ny(t),$$

converge vers $\tilde{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \end{bmatrix} \tilde{x}(t)$. On pose alors la variable d'erreur $z(t) = Tx(t) + \epsilon(t)$. Afin d'obtenir une dynamique de l'erreur autonome, $\dot{\epsilon}(t) = F\epsilon(t)$, on résout les équations matricielles :

$$\begin{aligned}MT + NC &= \begin{bmatrix} 0 & I_3 \end{bmatrix} \\ FT + G\tilde{C} - T\tilde{A} &= 0 \\ H &= T\tilde{b}\end{aligned}$$

En partitionnant la matrice T de la manière suivante $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$, il vient :

$$N = -T_1; M = I_3, T_2 = I_3$$

et

$$\begin{aligned}F &= A_{22} + T_1A_{12} \\ G &= -FT_1 + T_1A_{11} + T_2A_{21}\end{aligned}$$

On choisit les valeurs propres de l'erreur d'estimation pour obtenir des modes apériodiques plus rapides que les modes dominants du système bouclée (5 fois plus rapide) soit par exemple :

$$\{-3; -10; -10\}$$

En utilisant Matlab, on trouve alors $T_1 = \begin{bmatrix} -0.2058 & -0.104 & -18.28 \end{bmatrix}^T$.

Le sujet n'est pas explicite. Faut il ensuite simuler l'observateur, le système en boucle fermée par un retour d'état basé observateur ? Dans un premier temps,

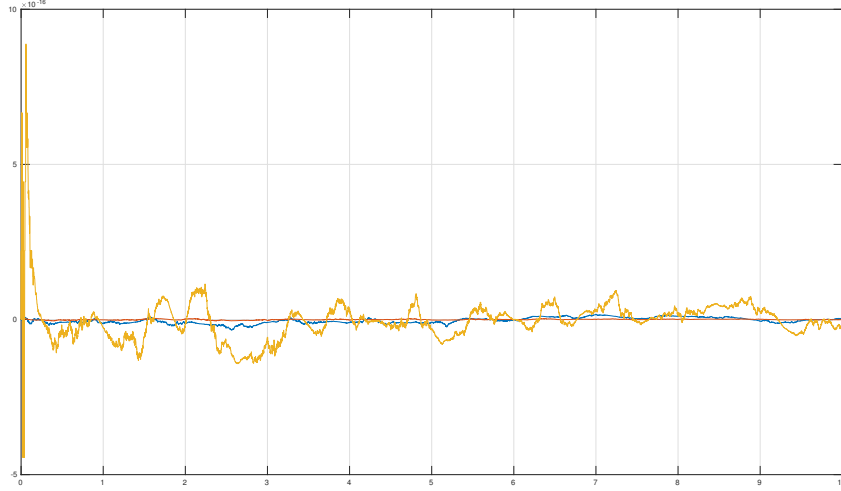


FIGURE 3 – Evolution temporelle des états de l'observateur pour $\epsilon(0) = 0$

nous allons simuler l'observateur lorsqu'il estime les états du système en boucle ouverte et caractériser ses performances temporelles. Ensuite, nous allons simuler le système en boucle fermée par un retour d'état basé observateur.

Simulations de l'observateur sur le modèle en boucle ouverte

La Figure 3 montre l'évolution temporelle du vecteur d'état de l'observateur pour des conditions initiales égales à $\tilde{x}(0) = [0.1, 0, 0, 0]$, $z(0) = T\tilde{x}(0)$ et pour une entrée $u(t) = 1$ pour le système en boucle ouverte. Le temps de réponse estimé est de l'ordre de 1sec . Dans ce cas, $\epsilon(0) = z(0) - T\tilde{x}(0) = 0$ et comme l'erreur suit la loi $\epsilon(t) = e^{Ft}\epsilon(0)$, cette erreur est nulle (confirmé par la Figure 3).

La Figure 4 montre la convergence de l'observateur autour de 1sec pour des conditions initiales égales à $\tilde{x}(0) = [0.1, 0, 0, 0]^T$, $z(0) = 0$ et pour une entrée $u(t) = 1$ pour le système en boucle ouverte. Dans ce cas, l'erreur initiale n'est pas nulle et elle converge vers 0 en moins d'une seconde.

Simulations du système en boucle fermée par un retour d'état basé observateur Dans un premier temps, nous avons simulé le modèle en boucle fermée par un retour d'état basé observateur avec comme conditions initiales $\tilde{x}(0) = [0.1, 0, 0, 0]^T$, $z(0) = T\tilde{x}(0)$, correspondant à $\epsilon(0) = 0$. Les résultats sont présentés dans la Figure 5. Comme on pouvait s'y attendre, on obtient exactement les mêmes courbes que pour le cas du retour d'état sans observateur. Les états $\tilde{x}(t)$ convergent en moins de 5sec .

Dans un second temps, nous avons simulé le modèle en boucle fermée par un retour d'état basé observateur avec comme conditions initiales $\tilde{x}(0) = [0.1, 0, 0, 0]^T$, $z(0) = 0$, correspondant à $\epsilon(0) \neq 0$. Les résultats sont présentés dans la Figure 6. Globalement, les réponses temporelles convergent en moins de 5sec car le mode de $A - bK$ dont la valeur propre est $-\frac{3}{5}$ est dominant. Cependant le régime tran-

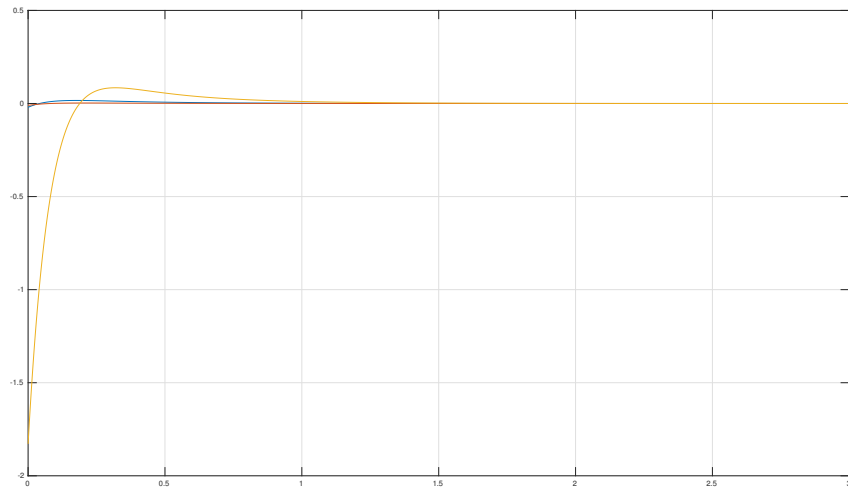


FIGURE 4 – Evolution temporelle des états de l'observateur pour $\epsilon(0) \neq 0$

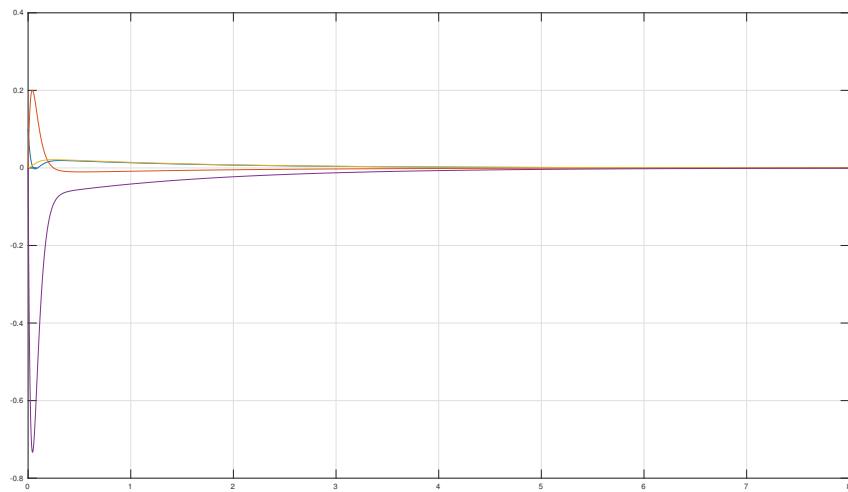


FIGURE 5 – Evolution temporelle des états $\hat{x}(t)$ pour $\epsilon(0) = 0$

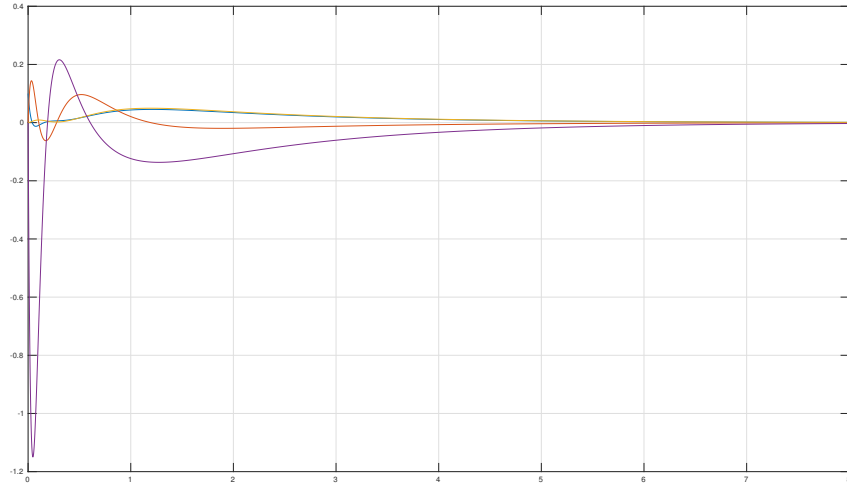


FIGURE 6 – Evolution temporelle des états $\tilde{x}(t)$ pour $\epsilon(0) \neq 0$

sitoire est également modifié par les modes de l'erreur d'estimation (voir Figure 7 pour l'évolution temporelle de l'erreur d'estimation).

2 Partie B

Cette partie peut être difficile à comprendre. Si nous avons bien compris, le système subit une perturbation sinusoïdale de petit amplitude mais la fréquence n'est pas indiquée et pourtant c'est très important.

- Question 1 : La question est mal formulée. On ne sait pas trop comment y répondre. Doit-on expliquer en quoi implique le changement de la dynamique de l'erreur d'estimation ? Doit-on expliquer en quoi l'ajout d'une perturbation change la nature du problème à résoudre ? On suppose dans la suite de la question que seul le problème du changement de dynamique de l'erreur est étudiée. Le problème de l'ajout de la perturbation de commande est étudié dans la question 2.

Si nous changeons la dynamique de l'erreur d'estimation, même si les modes dominants restent les modes associés à $A - bK$, les modes associés à l'erreur d'estimation peuvent influencer la réponse. Ainsi, si nous choisissons des valeurs propres désirées pour F égales à $\{-\frac{6}{5}, -10, -10\}$ et recalculons l'observateur, nous obtenons les résultats de simulation de la boucle fermée suivant. La Figure 8 montre la convergence de l'erreur d'estimation qui est effectivement moins rapide. L'évolution temporelle des états $\tilde{x}(t)$ est donnée par la Figure 9. Comme on pouvait s'y attendre, les modes de l'erreur d'estimation influence plus fortement la réponse du système. La convergence est moins rapide autour de $6 - 7sec$.

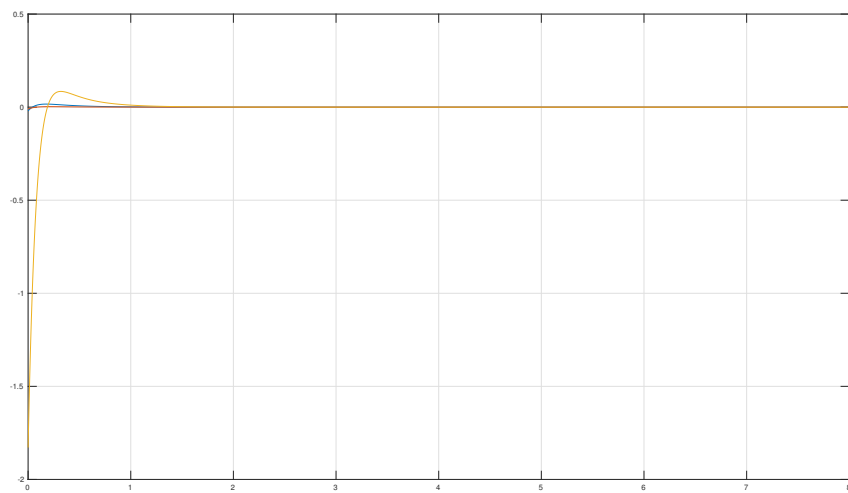


FIGURE 7 – Evolution temporelle de l'erreur $\epsilon(t)$ pour $\epsilon(0) \neq 0$ (observateur 5 fois plus rapide)

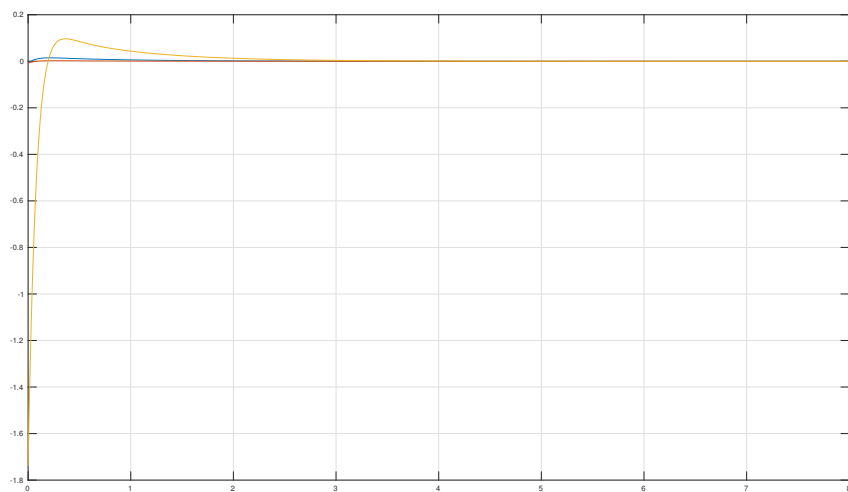


FIGURE 8 – Evolution temporelle de l'erreur $\epsilon(t)$ pour $\epsilon(0) \neq 0$ (observateur 2 fois plus rapide)

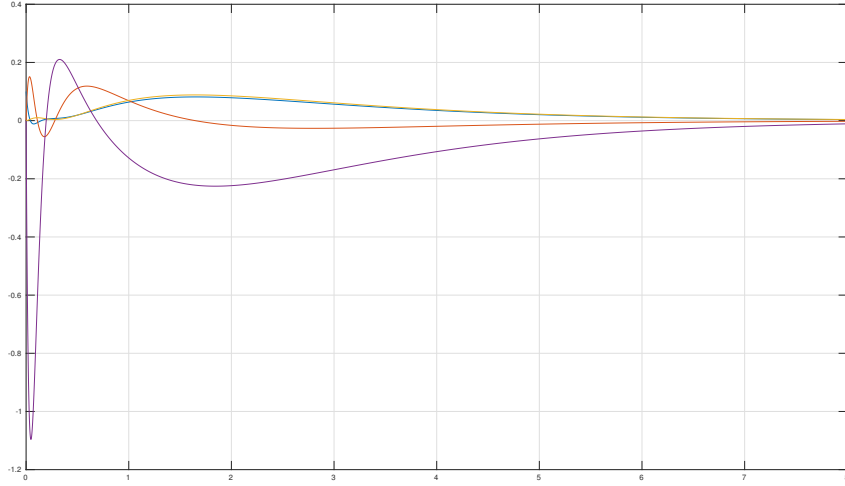


FIGURE 9 – Evolution temporelle des états $\tilde{x}(t)$ pour $\epsilon(0) \neq 0$ (observateur 2 fois plus rapide)

- Question 2 : Appelons $d(t)$ la perturbation de commande, en utilisant les variables d'état $w(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix}$, le modèle du système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{b}KP & -\tilde{b}KP \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ 0 & F \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \tilde{b} \\ -T\tilde{b} \end{bmatrix} d(t)$$

$$y(t) = [\tilde{C} \ 0] w(t)$$

On remarque alors que l'erreur d'estimation n'est plus autonome mais est soumise à l'entrée de perturbation. Choisissons un signal sinusoïdale de faible amplitude 0.1 et de pulsation égale à 1 rad/sec , c'est-à-dire $d(t) = 0.1 \sin(t)$. Lors de la simulation, nous n'observons aucune différence entre les deux jeux de simulations (observateur 5 et 2 fois plus rapides) et les jeux de simulations proposés dans la partie précédente (cf Simulink). Pour analyser ces phénomènes, nous pouvons calculer les deux fonctions de transfert $F(p)$ et tracer les diagrammes de Bode associés. Ceux-ci sont reportés dans la Figure 10. On s'aperçoit que pour les deux différents cas demandés le signal sinusoïdal est extrêmement atténué et ceci quelque soit la fréquence du signal de perturbation. Le système en boucle fermée avec un observateur 5 fois plus rapide atténue plus le signal de perturbation que le système en boucle fermée avec un observateur 2 fois plus rapide (autour de 10 dB). On peut également remarquer que les bandes passantes des deux fonctions de transfert sont pratiquement identiques.

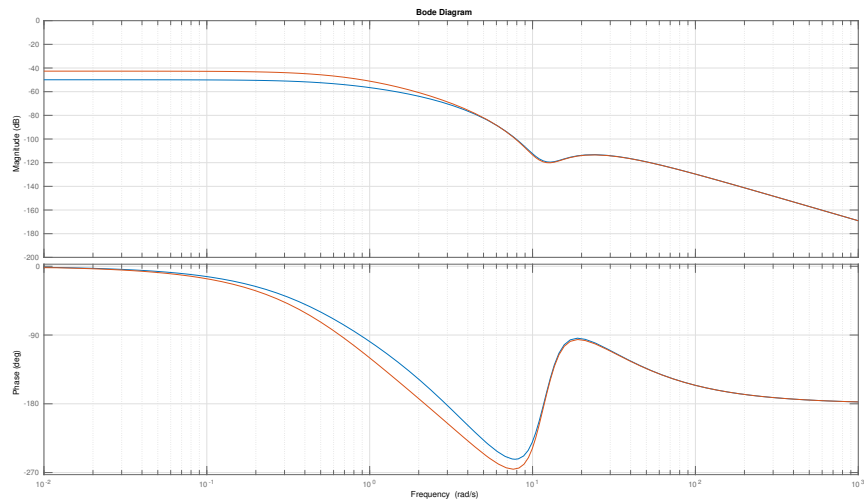


FIGURE 10 – Tracé de Bode de la fonction de transfert entre l'entrée de perturbation et la sortie y (Cas de l'observateur 5 et 2 fois plus rapide en bleu et rouge respectivement)

3 Code Matlab

Voir le script Matlab.